ŠIFRA KANDIDATA _ _ _ _ _

Zadatak 1. Za rješenja x_1, x_2 kvadratne jednačine $x^2+bx+c=0$ po nepoznatoj x, vrijedi da je $x_1^3+x_2^3=259$ i $x_1+x_2=7$. Koliko iznosi x_1x_2 ?

a) 4 b) 6 c) 7 d) 14

Rješenje: Iz relacije:

$$\left(x_1+x_2\right)^3=x_1^3+3x_1x_2^2+3x_1^2x_2+x_2^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$$

slijedi da je:

$$x_1x_2=\frac{\left(x_1+x_2\right)^3-\left(x_1^3+x_2^3\right)}{3\cdot\left(x_1+x_2\right)}$$

Uvrštavanjem $x_1+x_2=7$ i $x_1^3+x_2^3=259$ u prethodnu relaciju, dobije se $x_1x_2=4$.

Tačan odgovor je **a**.

Zadatak 2. Koliko realnih rješenja ima jednačina $\sqrt{x^2+1}=1-x^2$?

a) nijedno b) jedno c) dva d) četiri

Rješenje:
Definiciono područje ove nejednačine određeno je sa $x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

S obzirom da je sa lijeve strane zadane jednačine kvadratni aritmetički korijen, to izraz sa njene desne strane treba biti nenegativan, pa je domen zadane jednačine određen sa: $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-1,1\right]$.

Nakon kvadriranja početne jednačine dobije se:

$$x^2+1=x^4-2x^2+1,$$
$$x^4-3x^2=0,$$
$$x^2\left(x^2-3\right)=0.$$

Moguća rješenja su $x_1=0\vee x_2=\sqrt{3}\vee x_3=-\sqrt{3}$, od kojih samo rješenje x_1 pripada domenu, pa postoji **jedan** realan broj koji zadovoljava zadanu jednačinu. Tačan odgovor je **b**.

Zadatak 3. Parametar *k* za koji kvadratna jednačina $x^2+(3k-2)x+5k+3=0$ ima jedno rješenje $x_1=-2-3i$, gdje je *i* imaginarna jedinica, je:

a) 1 b) 7 c) 2 d) 4

Rješenje:

Zadan kvadratna jednačina ima jedno rješenje $x_1=-2-3i$ pa joj je drugo rješenje $x_2=-2+3i$, odakle slijedi da jednačin čija su to rješenja ima oblik:
$\left[x-(-2-3i)\right]\left[x-(-2+3i)\right]=x^2+4x+13=0$.

Izjednačavanjem koeficijenata uz *x* i slobodnih članova ove i zadane jednačine slijedi da je:
$3k-2=4\Rightarrow k=2$ ili $5k+3=13\Rightarrow k=2$.

Zadatak je moguće riješiti i uvrštavanjem zadanog rješenja u početnu jednačinu.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 4. Rješenje nejednačine $\sqrt{x+6}<x-6$ je svaki realni broj *x* za koji vrijedi:

a) $x\in(10,+\infty)$ b) $x\in(3,10)$ c) $x\in(3,6]$ d) $x\in(-\infty,3)\cup(10,+\infty)$

Rješenje: Domen zadane nejednačine je:

$$\bigcap\begin{cases}x+6\ge 0\Rightarrow x\ge -6\\ x-6\ge 0\Rightarrow x\ge 6\end{cases}\Rightarrow x\in[6,+\infty).$$

Kvadriranjem zadane nejednačine dobije se:

$$x+6<x^2-12x+36\Leftrightarrow x^2-13x+30>0$$

Posljednja nejednačina je zadovoljena za sve $x\in(-\infty,3)\cup(10,+\infty)$

Dobijena rješenja posljednjenejednačine koja ujedno pripadaju i domenu zadane nejednačine su svi realni brojevi: $x\in(10,+\infty)$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 5. Rješenje jednačine $(1+i)^m=(1-i)^m$, gdje je m iz skupa cijelih brojeva **Z**, a i je imaginarna jedinica, je:

a) $m=4k,\ k\in Z$ b) $m=2k+1,\ k\in Z$ c) $m=4k-3,\ k\in Z$ d) $m=2k,\ k\in Z$

Rješenje:

Iz $(1+i)^m=(1-i)^m$ slijedi da je $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m=1$, a racionalizacijom nazivnika dobije se:

$$\left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^m=\left(\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}\right)^m=i^m=1,$$

odakle slijedi da su sva rješenja po m zadane jednačine oblika $m=4k$, $k\in \mathrm{Z}$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 6. Ako za kompleksni broj z vrijedi $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=1$, gdje je i imaginarna jedinica, tada je $\arg(z)$:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) 0 c) π d) $-\frac{\pi}{4}$

Rješenje: Neka je $z=x+iy$, gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica.
Oblast rješavanja dobijenog sistema jednačina (zbog $x^2+y^2\neq 0$) je određena sa $(x,y)\neq(0,0)$.
Izračunavanjem dobijamo: $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$,

tj. $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=1$ i $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}=1$

Na osnovu prethodnih izraza je: $x=x^2+y^2$ i $-y=x^2+y^2$. Iz posljednjeg sistema jednačina slijedi da je $x=-y$, pa je $x=x^2+x^2$, tj. $x_1=0$ i $x_2=\frac{1}{2}$. S obzirom da $x_1=0$ ne zadovoljava oblast definiranosti posljednjeg sistema jednačina, a $x_2=\frac{1}{2}$ zadovoljava, to je $y=-\frac{1}{2}$, pa je traženi kompleksni broj $z=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{1}{2}$, odakle je $\arg(z)=\mathrm{arctg}\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 7. Vrijednost izraza $(2013)_4 + (2013)_5 - (2013)_6$ iznosi:

a) 2013 b) 3 c) -48 d) -6039

Rješenje:

Napišimo najprije sve sabirke izraza u dekadnom brojnom sistemu:

$$2013_{(4)} = 2\cdot 4^3 + 0\cdot 4^2 + 1\cdot 4^1 + 3\cdot 4^0 = 128 + 4 + 3 = 135,$$

$$2013_{(5)} = 2\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 1\cdot 5^1 + 3\cdot 5^0 = 250 + 5 + 3 = 258,$$

$$2013_{(6)} = 2\cdot 6^3 + 0\cdot 6^2 + 1\cdot 6^1 + 3\cdot 6^0 = 432 + 6 + 3 = 441.$$

Vrijednost zadatog izraza iznosi: $135 + 258 - 441 = -48$

Tačan odgovor je c.

Zadatak 8. Ukupan broj rješenja jednačine: $\cos x = -\sin 2x$ koja pripadaju segmentu $[-\pi, \pi]$ je:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Rješenje:

Jednačina $\cos x = -\sin 2x$ se transformiše u $\cos x = -2\sin x \cos x \Rightarrow \cos x(1 + 2\sin x) = 0$.

Iz prethodne jednačine slijedi da je $\cos x = 0$ ili $1 + 2\sin x = 0$, odakle se daljim rješavanjem dobije:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_{1,k} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_{2,m} = -\frac{\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in Z;\ x_{3,n} = -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in Z$$

Uvrštavanjem k, *m* i *n* u posljednje relacije se dobije da segmentu $[-\pi, \pi]$ pripadaju samo rješenja

$x_{1,1} = -\frac{\pi}{2}$, $x_{1,0} = \frac{\pi}{2}$, $x_{2,0} = -\frac{\pi}{6}$, $x_{3,0} = -\frac{5\pi}{6}$, t.j. ukupno 4 rješenja zadane jednačine pripadaju segmentu $[-\pi, \pi]$.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 9. Rješenje logaritamske jednačine $\log_3 x + \log_9 x + \frac{1}{2}\log_3 x = 4$ je:

a) $x = 8$ b) $x = 2$ c) $x = 4$ d) $x = 9$

Rješenje:

Iz izraza za zadanu jednačinu slijedi da je $x > 0$, odnosno domen zadane jednačine je $(0,+\infty)$.

Zadana jednačina je ekvivalentna jednačinama:

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \frac{1}{2}\log_3 x = 4,$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x = 4,$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\log_3 x = 4,$$

$$2 \cdot \log_3 x = 4,$$

$$\log_3 x = 2,$$

$$x = 3^2 = 9.$$

Kako je $x = 9 \in (0,+\infty)$, to zadana jednačina ima samo jedno rješenje $x = 9$.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 10. Rješenje eksponencijalne nejednačine $0,5^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} \geq 4$ je svaki realni broj *x* za koji je:

a) $|x| < 1$ b) $|x| > 1$ c) $|x| \leq 2$ d) $|x| \geq 2$

Rješenje: Domen zadane nejednačine je $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$.

Zadana nejednačina je ekvivalentna sa:

$$\left(\frac{5}{10}\right)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} \geq 4 \Leftrightarrow 2^{-\frac{x^2+2}{x^2-1}} \geq 2^2 \Leftrightarrow -\frac{x^2+2}{x^2-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{x^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

Tačno rješenje je a.

NAPOMENA: Naknadnim pregledom je ustanovljeno da je u postavci zadatka došlo do štamparske greške, gdje je trebalo da stoji znak $\geq$, a greškom je napisano >.

Zbog navedene činjenice svim kandidatima je priznato 2 boda na ovom zadatku.

Zadatak 11. Vrijednost izraza $\sin^4 \frac{5\pi}{12} + \cos^4 \frac{7\pi}{12}$ iznosi:

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{11}{8}$ c) $\frac{9}{8}$ d) $\frac{7}{8}$

Rješenje: Izračunavanjem se dobije:

$$\sin^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{10\pi}{12}}{2} = \frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4},$$

$$\cos^2 \frac{7\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{14\pi}{12}}{2} = \frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2} = \frac{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4},$$

odakle uvrštavanjem se dobije vrijednost izraza zadanog izraza:

$$\sin^4 \frac{5\pi}{12} + \cos^4 \frac{7\pi}{12} = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 12. Ako je zbir trećeg i petog člana aritmetičkog niza 22, a šesti član je 17, zbir drugog i četvrtog člana je:

a)14 b) 12 c) 10 d) 16

Rješenje: Za *n*-ti član aritmetičkog niza vrijedi

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

gdje je a_1 prvi član niza, a d je diferencija niza.

Na osnovu uslova iz postavke zadatka je

$$a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d = 22,$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Dakle, treba riješiti sistem linearnih jednačina

$$2a_1 + 6d = 22$$
$$a_1 + 5d = 17.$$

Njegovim rješavanjem se dobije da je $a_1 = 2$ i $d = 3$.

Zbir drugog i četvrtog člana je

$$a_2 + a_4 = a_1 + d + a_1 + 3d = 2a_1 + 4d = 16.$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 13. Pojednostavljenjem izraza $\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{a+b}-\frac{b}{a}\right)$ u skupu realnih brojeva, ako je $a,b\neq 0,\ a\neq -b$ dobije se:

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{b}{a}$ c) 1 d) $\frac{ab}{(a+b)^2}$

Rješenje:

Zadati izraz se može napisati u obliku:

$$\frac{ab-a^2-ab}{(a+b)\cdot b}\cdot\frac{ab-ab-b^2}{(a+b)\cdot a}=\frac{-a^2}{(a+b)\cdot b}\cdot\frac{-b^2}{(a+b)\cdot a}=\frac{a^2b^2}{(a+b)^2\cdot ab}=\frac{ab}{(a+b)^2}$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 14. Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima nejednačina $\log_5 x\cdot(1-\log_5 x)>0$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Rješenje:

Domen zadane nejednačine je skup $\{x\in N\}$, pa je ta nejednačina ekvivalentna sa

$0<\log_5 x<1\Rightarrow 1<x<5\Rightarrow x\in\{2,3,4\}$

Dakle ukupno ima 3 rješenja.

Tačan odgovor je b.

Zadatak 15. Kružnice poluprečnika $r = 2$ dodiruje pozitivan dio ose Ox i ima centar na pravoj $y = 2x$. Jednačina te kružnice je:

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$
b) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$
c) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$
d) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

Rješenje:

Neka je tačka $C(p,q)$ centar tražene kružnice.

Kako tačka $C(p,q)$ pripada pravoj $y = 2x$, to je $q = 2p$.

S obzirom da tražena kružnica dodiruje osu Ox to mora vrijediti da je $|q| = r = 2$, gdje je r poluprečnik kružnice, tj. $|q| = 2$, pa je $q = \pm 2$. Tada iz $q = 2p$ slijedi da je $p = \pm 1$. S obzirom da kružnica dodiruje pozitivan dio ose Ox, to je njen centar u tački $C(1,2)$ pa je jednačina tražene kružnice $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 16. Ako je ostatak pri dijeljenju polinoma $x^3 + 2x^2 + ax + b$ polinomom $x^2 + x + 2$ jednak $7x+7$, onda je $a-b$ jednako:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Rješenje:

Dijeljenjem polinoma $x^3 + 2x^2 + ax + b$ polinomom $x^2 + x + 2$ dobijemo:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+2x^2+ax+b):(x^2+x+2) = x+1 \\
\underline{-x^3-x^2-2x} \\
\qquad x^2-2x+ax+b \\
\quad \underline{\;-x^2-x-2\qquad\quad} \\
\qquad\quad -3x+ax+b-2
\end{array}
$$

Dakle, ostatak prethodnog dijeljenja je $-3x + ax + b - 2$ a to je jednako $7x+7$, odakle izjednačavajući odgovarajuće koeficijente uz *x* i slobodan član imamo:

$-3 + a = 7 \Rightarrow a = 10$,

$b - 2 = 7 \Rightarrow b = 9$

Na osnovu ovog slijedi da je $a - b = 1$

Tačan odgovor je b.

Zadatak 17. Poznat je položaj tačaka $T_1(-1,1)$ i $T_2(1,2)$. Prava p prolazi kroz središte duži $\overline{T_1T_2}$ a okomita je na pravac koji prolazi tačkama T_1 i T_2.Jednačina prave p je:

a) $y=-2x+\frac{3}{2}$ b) $y=2x-\frac{3}{2}$ c) $y=-x+\frac{1}{2}$ d) $y=x-\frac{1}{2}$

Rješenje:

Jednačina prave p_1 koja sadrži tačke T_1 i T_2 je $y-1=\frac{2-1}{1+1}(x+1)$; $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Tražena prava p je okomita na pravu p_1 pa joj je koeficijent nagiba $k=\frac{-1}{k_1}=-2$, pri čemu je k_1 koeficijent nagiba prave p_1. Koordinate tačke A koja se nalazi na polovini duži $\overline{T_1T_2}$ su $\left(\frac{x_{T_1}+x_{T_2}}{2},\frac{y_{T_1}+y_{T_2}}{2}\right)=\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

Jednačina prave p se može pisati u obliku $y=kx+n$. Uvrštavanjem podataka za tačku A, i koeficijent k dobije se vrijednost $n=\frac{3}{2}$, pa jednačina prave p ima oblik: $y=-2x+\frac{3}{2}$.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 18. Prosti faktor polinoma x^4-5x^2+4 nije:

a) $x-1$ b) $x+1$ c) $x-2$ d) $x-3$

Rješenje: Riješimo bikvadratnu jednačinu: $x^4-5x^2+4=0$

Uvođenjem smjene $x^2=t$ i rješavanjem dobijene kvadratne jednačine dobijemo:

$t^2-5t+4=0\Rightarrow t_1=1,t_2=4$, odakle uvrštavanjem u $x^2=t$ dobijemo:

$x^2=1\Rightarrow x=\pm1$, $x^2=4\Rightarrow x=\pm2$

Slijedi da se dati izraz može napisati u obliku: $x^4-5x^2+4=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$, odnosno izraz $x-3$ nije prosti faktor polinoma x^4-5x^2+4.

Tačan odgovor je d.

Zadatak 19. Koliko ima parnih četverocifrenih brojeva kojima je zbir cifara jedinica i desetica 4?

a) 270 b) 4500 c) 1500 d) 450

Rješenje:

Na prvom mjestu četverocifrenog broja (cifra hiljada) se može pojaviti bilo koja cifra iz skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, na drugom mjestu (cifra stotica) se može pojaviti bilo koja cifra iz istog skupa uz dodatak cifre 0. Na posljednja dva mjesta (cifra desetica i jedinica) se može pojaviti neki od skupova $\{0,4\}$, $\{2,2\}$, $\{4,0\}$ da bi bili zadovoljeni uslovi zadatka. Multiplikativnim principom se sada dobija da postoji $9\cdot 10\cdot 3=270$ takvih brojeva.

Tačan odgovor je a.

Zadatak 20. Ako je $\operatorname{tg}\alpha=0{,}5$ ($\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$), tada je $\sin\alpha+\cos\alpha$:

a) $-\frac{3}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Rješenje:

Iz $\operatorname{tg}\alpha=0{,}5$, tj. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}$ je $\sin\alpha=\frac{\cos\alpha}{2}$.

Izračunavanjem se dobije: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\frac{\cos^2\alpha}{4}+\cos^2\alpha=1$, tj. $\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. S obzirom da je prema uslovu zadatka: $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, to je $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, pa je tada $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Konačno je: $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Tačan odgovor je a.