ŠIFRA KANDIDATA _ _ _ _ _

Zadatak 1. Proizvod rješenja jednačine $4x^2 - 52x = 64$ je:

a) 16 b) -16 c) 13 d) -13

Rješenje:

Jednačinu je moguće napisati u obliku

$4x^2 - 52x - 64 = 0.$

Na osnovu Vietovih formula, proizvod rješenja kvadratne jednačine

$ax^2 + bx + c = 0$,

gdje su $a$, $b$ i $c$ realne konstante je $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Upoređujući prethodne jednačine lako se zaključi da je $a = 4$ i $c = -64$, pa je proizvod rješenja jednak $\frac{c}{a} = -16$. Tačan odgovor je b.

Zadatak 2. Ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = 2x^5 + 2x^4 + x^2 - 12x + 1$ polinomom $Q(x) = x + 1$ je:

a) -6 b) 14 c) 16 d) 0

Rješenje:

Po Bezuovom stavu ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x)$ polinomom oblika $(x - a)$ je vrijednost $P(a)$. Primjenom tog stava zaključuje se da ostatak pri dijeljenju $P(x)$ sa $Q(x) = x - (-1)$ iznosi

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^5 + 2 \cdot (-1)^4 + (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 1 = -2 + 2 + 1 + 12 + 1 = 14$.

Tačan odgovor je b.

Zadatak 3. Sve vrijednosti realnog parametra $k$ za koje prava $p: y = kx + 2$ predstavlja tangentu kružnice $K: x^2 + y^2 = 1$ su:

a) 1   b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$   c) $\pm 2$   d) $\pm\sqrt{3}$

Rješenje:

Da bi prava bila tangenta kružnice potreban i dovoljan uslov jeste da sistem jednačina

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = kx + 2,$$

ima samo jedno rješenje.

Uvrštavajući drugu jednačinu u prvu, dobije se

$$x^2 + (kx + 2)^2 = 1.$$

Posljednja jednačina se može svesti na oblik

$$x^2(1 + k^2) + 4kx + 3 = 0.$$

Početni sistem jednačina će imati samo jedno rješenje, tj. prava $p$ će biti tangenta kružnice $K$ ako ova kvadratna jednačina ima samo jedno rješenje, dakle ako joj je diskriminanta jednaka nuli. Iz tog uslova dobije se

$$D = 16k^2 - 12(1 + k^2) = 0 \Leftrightarrow 16k^2 - 12 - 12k^2 = 0,$$

$$k^2 = 3 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}.$$

Tačan odgovor je d.

Zadatak 4. Skup rješenja nejednačine $\frac{2x-5}{x+3} \leq 1$ je:

a) $[8, +\infty)$   b) $(-3, 8]$   c) $[-8, 3]$   d) $(-\infty, -3)$

Rješenje:

Domen nejednačine $\frac{2x-5}{x+3} \leq 1$ je skup $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$, a nakon primjene osnovnih matematskih operacija nejednačina se svodi na $\frac{2x-5-(x+3)}{x+3} \leq 0$, $\frac{x-8}{x+3} \leq 0$.

| | $-\infty \quad -3 \quad 8 \quad +\infty$ | | |
|---|---|---|---|
| $x+3$ | - | + | + |
| $x-8$ | - | - | + |
| $\frac{x-8}{x+3}$ | + | - | + |

Tabelarnim rješavanjem dobije se rješenje početne nejednačine u vidu skupa $(-3, 8]$. Tačan odgovor je b.

Zadatak 5. Vrijednost izraza $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$, za $z=2i$, je:

a) 5 b) 2 c) 1 d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Rješenje:

Korištenjem pravila za modul količnika izraz $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$ postaje $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|=\frac{|1-z|}{|1+z|}=\frac{|1-2i|}{|1+2i|}=\frac{\sqrt{1+(-2)^2}}{\sqrt{1+2^2}}=1$. Tačan odgovor je c.

Zadatak 6. Kompleksan broj $z\neq 0$ ima osobinu da mu je $\operatorname{Re}(z)$ dva puta veći od $\operatorname{Im}(z)$. Za koliko procenata je $\operatorname{Re}(z^2)$ manje od $\operatorname{Im}(z^2)$?

a) 20% b) 25% c) 33% d) 50%

Rješenje:

Neka je kompleksan broj $z=x+iy$ i prema uslovima zadatka važi $x=2y$. $z^2=(x+iy)^2=x^2+2xyi-y^2$. Prema prethodnim relacijama vrijedi $\operatorname{Re}(z^2)=x^2-y^2=\frac{3}{4}x^2$ i $\operatorname{Im}(z^2)=2xy=x^2$, pa je $\operatorname{Re}(z^2)=\frac{3}{4}\operatorname{Im}(z^2)$ i $\operatorname{Re}(z^2)$ je za 25% manji od $\operatorname{Im}(z^2)$. Tačan odgovor je b.

Zadatak 7. Dat je izraz $A=\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)$. On je, uz uslove $a\neq\pm b\wedge b\neq 0$, ekvivalentan sa:

a) $A=-\frac{2}{b}$ b) $A=\frac{2}{b}$ c) $A=-\frac{2a}{b^2}$ d) $A=\frac{2a}{b^2}$

Rješenje:
Izraz A je ekvivalentan sa

$A=\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)=\frac{a-b-a-b}{(a+b)(a-b)}\frac{a^2-b^2}{b^2}=-\frac{2}{b}$. Tačan odgovor je a.

Zadatak 8. Ako je $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ i $\alpha\in[0,\pi]$, onda je $\sin\alpha$ jednako:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\pm\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{5}$

Rješenje:
Polazi se od poznatog trigonometrijskog identiteta: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, pa je

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$.

Pošto je $\sin\alpha\geq 0$, za svako $\alpha\in[0,\pi]$, slijedi da je $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Tačan odgovor je a.

Zadatak 9. Rješenja logaritamske jednačine $\log_5^2 x - \log_5 x - 6 = 0$ su $x_1$ i $x_2$. Proizvod rješenja $x_1 \cdot x_2$ iznosi:

a) 5 b) 6 c) 1 d) 25

Rješenje:

Domen date jednačine je skup $(0,+\infty)$. Jednačina se svodi na kvadratnu, uz smjenu $\log_5 x = t$. Dobije se

$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = -2 \vee t_2 = 3.$$

Dalje je

$$\log_5 x = -2 \quad \vee \quad \log_5 x = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{25} \qquad x_2 = 125$$

Očito je proizvod rješenja jednak 5. Tačan odgovor je a.

Zadatak 10. Jednačina $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$ ima 2 rješenja, $x_1$ *i* $x_2$. Suma $x_1^2 + x_2^2$ iznosi:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{5}{4}$

Rješenje:

Domen date jednačine je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jednačina se može ekvivalentirati na sljedeći način:

$$2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}}$$

$$2x = \frac{x+1}{x}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

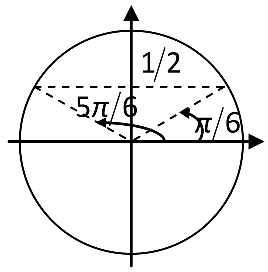
$x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$. Tražena suma iznosi $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$. Tačan odgovor je d.

Zadatak 11. Sva rješenja trigonometrijske jednačine $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=1$, na segmentu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ su:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{-\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{7\pi}{18}$ d) $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{7\pi}{18}$ i $\frac{5\pi}{6}$

Rješenje:

Domen date jednačine je skup $\mathbb{R}$. Rješenje jednačine je lahko grafički odrediti ako se jednačina napiše u obliku $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, sa sljedeće slike. Dobije se




$3x_1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ $3x_2-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$3x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ $3x_2=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$ $x_2=\frac{7\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

Za prethodna dva rješenja u zatvorenom obliku, rješenja koja pripadaju segmentu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ su:

$x_{1,0}=\frac{\pi}{6}$ i $x_{2,0}=\frac{7\pi}{18}$ (za $k=0$). Ostala rješenja bi bila izvan posmatranog segmenta. Tačan odgovor je c.

Zadatak 12. Na šahovski turnir se prijavilo 10 igrača. Svaki igrač igra sa ostalima po jednu partiju. Ukupan broj odigranih partija je:

a) 90 b) 60 c) 45 d) 25

Rješenje:

Svaki igrač je odigrao N-1 partiju sa ostalim igračima (ako je N broj igrača). Ukupan broj odigranih partija je $\frac{N(N-1)}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$, budući da ne treba duplo računati partije koje odigraju dva igrača međusobno. Tačan odgovor je c.

Zadatak 13. Oznaka $a_{(b)}$ je oznaka broja *a* izraženog u brojnom sistemu baze *b*. Suma $444_{(6)}+213_{(6)}$ jednaka je broju:

a) $1101_{(6)}$ b) $250_{(10)}$ c) $250_{(6)}$ d) $1101_{(2)}$

Rješenje:
Data suma se može direktno odrediti u brojnom sistemu baze 6 i iznosi:

$$\begin{array}{r} 4\ 4\ 4 \\ +\ 2\ 1\ 3 \\ \hline 1\ {}^{1}1\ {}^{1}0\ {}^{1}1 \end{array}$$

Zadatak se može riješiti i predstavljanjem sabiraka u brojnom sistemu baze 10, sabiranjem i provjeravanjem tog rezultata u brojnim sistemima baza 2 i 6 (zbog ponuđenih odgovora).

$$444_{(6)}+213_{(6)}=\left(4\cdot 6^2+4\cdot 6+4\right)+\left(2\cdot 6^2+1\cdot 6+3\right)=253_{(10)}$$

Predstavljanjem posljednjeg broja u brojnom sistemu baze 6, dobiva se isti rezultat kao i direktnim sabiranjem. Tačan odgovor je a.

Zadatak 14. Rješenje nejednačine $\log_2\left(x^2-3x+4\right)<\log_2 2$ je skup:

a) $(1,2)$ b) $(0,2)$ c) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ d) $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

Rješenje:
Domen date nejednačine je skup $\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x+4>0\right\}=\mathbb{R}$. Data nejednačina je ekvivalentna nejednačinama

$x^2-3x+4<2,$

$x^2-3x+2<0,$

$(x-1)\cdot(x-2)<0.$

Rješenje dobivene kvadratne nejednačine je skup $(1,2)$. Tačan odgovor je a.

Zadatak 15. Jednačina kružnice koncentrične sa $x^2+y^2+6x+2y+5=0$, a koja prolazi kroz tačku T(1, -4) je:

a) $K:(x+3)^2+(y+1)^2=25$ b) $K:(x-3)^2+(y+1)^2=16$

c) $K:(x+3)^2+(y+1)^2=16$ d) $K:(x+3)^2+(y-1)^2=25$

Rješenje:

Jednačina date kružnice se može pisati u obliku

$x^2+y^2+6x+2y+5=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y+1)^2=5 \Rightarrow C(-3,-1)$, $r=\sqrt{5}$.

Tražena kružnica je

$K:(x+3)^2+(y+1)^2=R^2$, $T(1,-4)\in K \Rightarrow (1+3)^2+(-4+1)^2=R^2 \Rightarrow R=5$

Tačan odgovor je a.

Zadatak 16. Roba je snižena za 20%. Koliko mora iznositi poskupljenje u procentima da bi se vratila prvobitna cijena robe?

a) 20% b) 25% c)30% d)50%

Rješenje:

Pretpostavit će se da je prvobitna cijena robe *x*. Nakon sniženja ta roba ima vrijednost

$x-20\%\cdot x = x-\frac{20}{100}x = x-0,2x=0,8x$.

Potrebno je vratiti prvobitnu cijenu robe uz poskupljenje od $a(\%)$. Zbog toga je

$0,8x+a(\%)\cdot 0,8x=x,$

$0,8+\frac{a}{100}0,8=1,$

$a=25.$

Tačan odgovor je b.

Zadatak 17. Tačke $D(2,3)$, $E(-1,2)$, $F(4,5)$ su središta stranica BC, CA i AB trougla ABC respektivno. Zbir koordinata tačke A jednak je:
a)-2 b) -1 c) 0 d) 5

Rješenje:
Kako su $D(2,3)$, $E(-1,2)$, $F(4,5)$ središta stranica BC, CA i AB trougla ABC respektivno, to važe jednačine

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = 2 \text{ i } y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = 3,$$

$$x_E = \frac{x_C + x_A}{2} = -1 \text{ i } y_E = \frac{y_C + y_A}{2} = 2,$$

$$x_F = \frac{x_A + x_B}{2} = 4 \text{ i } y_F = \frac{y_A + y_B}{2} = 5,$$

odakle slijedi skup sistema

$$x_A + x_B = 8 \wedge x_A - x_B = -6 \Rightarrow x_A = 1,$$

$$y_A + y_B = 10 \wedge y_A - y_B = -2 \Rightarrow y_A = 4,$$

pa je zbir koordinata tačke A, jednak 5. Tačan odgovor je d.

Zadatak 18. Jednačina $(m-1)x^2 - 2mx + 3 = 0$ ima realna rješenja suprotnog znaka. Vrijednosti realnog parametra *m,* za koje je zadovoljen prethodni uslov, pripadaju intervalu:
a) $(-\infty,1)$ b) $(-\infty,5)$ c) $(-5,1)$ d) $(-\infty,0)$

Rješenje:
Da bi jednačina imala realna rješenja, za diskriminantu $D$ mora biti zadovoljeno $D \geq 0$. Za ovu jednačinu je $D = 4m^2 - 12m + 12$, i vrijedi $D \geq 0$ za sve vrijednosti realnog parametra $m$.
Zahtjev zadatka da rješenja kvadratne jednačine budu suprotnog znaka može se ekvivalentirati zahtjevom da proizvod rješenja jednačine bude negativan (to će u oba slučaja biti proizvod pozitivnog i negativnog broja), pa slijedi

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow (x_1 < 0 \wedge x_2 > 0) \vee (x_1 > 0 \wedge x_2 < 0).$$

Prema Vietovim pravilima, za kvadratnu jednačinu $ax^2 + bx + c = 0$, je $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$.

Direktnim očitanjem koeficijenata iz postavljene jednačine dobije se

$c = 3$ i $a = (m-1)$.

Uvrštavanjem u modificiranu formu uslova zadatka slijedi

$$\frac{3}{m-1} < 0, \qquad m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1.$$

Dakle, za vrijednosti parametra $m$ iz intervala $(-\infty,1)$, zadata kvadratna jednačina ima korijene različitog znaka. Tačan odgovor je a.

Zadatak 19. Skup svih realnih rješenja nejednačine $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}>\sqrt{2x-8}$ je:

a) $[4,7]$ b) $[4,5]\cup(6,7]$ c) $[4,5)\cup(6,7]$ d) $[4,5)\cup[6,7)$

Rješenje:

Domen nejednačine je skup $\{x\in\mathbb{R}: x+3\geq 0\wedge 7-x\geq 0\wedge 2x-8\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}>4\leq x\leq 7\}$.

Sređivanjem i kvadriranjem nejednačine dobije se $\begin{matrix} x+3>7-x+2\sqrt{(7-x)(2x-8)}+2x-8 \\ 2>\sqrt{(7-x)(2x-8)} \end{matrix}$. Izraz na lijevoj strani je sigurno nenegativan, pa nejednačina postaje $\begin{matrix} -2x^2+22x-60<0 \\ -x^2+11x-30<0 \end{matrix}$, čija je rješenje skup $(-\infty,5)\cup(6,+\infty)$. Presjekom rješenja i domena, rješenje nejednačine je skup $[4,5)\cup(6,7]$.

Tačan odgovor je c.

Zadatak 20. Neka je $x$ oštar ugao. Rješenje nejednačine $\sin x+\sqrt{3}\cos x>\sqrt{3}$ je interval:

a) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ b) $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ c) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ d) $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

Rješenje:

Domen nejednačine je skup $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Nejednačina transformacijom postaje

$$\begin{matrix} \sin x+\sqrt{3}\cos x>\sqrt{3} \\ \sin x+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>\sqrt{3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \sin x\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix},$$

$\begin{matrix} \frac{\pi}{3}+2k\pi<x+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \\ 2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \end{matrix}$, što svođenjem na prvi kvadrant postaje $0<x<\frac{\pi}{3}$. Tačan odgovor je d.